

## **LA ENSEÑANZA DE LA DISCIPLINA DE GEOMETRIA ANALÍTICA EN LA CARRERA DE MATEMÁTICA DEL ISCED- HUAMBO CON EL USO DEL CAS**

LA ENSEÑANZA DE LA DISCIPLINA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

AUTORES:

Mário Rafael Estrada Doallo <sup>1</sup>

Matias Chilua Wapinda <sup>2</sup>

João Baptista Machado Sousa<sup>3</sup>

ENDEREÇO PARA CONTATO: [wapinda@hotmail.com](mailto:wapinda@hotmail.com)

Data de recepção: 12-01-2018

Data de aceitação: 18-04-2018

### **RESUMO**

El programa GeoGebra, es uno de los programas de matemática dinámica más consultados y utilizados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la actualidad, pues mezcla la funcionalidad de un procesador geométrico y algebraico, es un software de matemáticas que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo. El trabajo recoge algunos de los resultados obtenidos en el proceso investigativo llevado a cabo por los autores y donde se muestra cómo usar el GeoGebra en la disciplina Geometría Analítica, a través de la opción CAS, incorporación que han hecho en las últimas versiones de GeoGebra y que su forma de trabajar es similar a la utilizada en los programas de cálculo simbólico.

**PALABRAS CLAVE:** Programa de Matemática Dinámica, Geometría Analítica, Situación de aprendizaje.

## **THE TEACHING OF THE DISCIPLINE OF ANALYTICAL GEOMETRY IN THE MATHEMATICAL CAREER OF ISCED-HUAMBO WITH THE USE OF CAS**

### **ABSTRACT**

The GeoGebra program, is one of the most consulted dynamic mathematics programs used in the teaching and learning of mathematics today, since it mixes the functionality of a geometric and algebraic processor, it is a mathematics software that combines geometry, algebra, statistics and calculation. The work collects some of the results obtained in the research process carried out by the authors and where it is shown how

---

<sup>1</sup> Master em Ciências Pedagógicas, professor do Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo.

<sup>2</sup> Doctor em Ciências Pedagógicas, professor do Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo.

<sup>3</sup> Doctor em Ciências Pedagógicas, professor do Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo.  
[sousangola@gmail.com](mailto:sousangola@gmail.com)

to use the GeoGebra in the discipline Analytical Geometry, through the CAS option, incorporation that they have done in the latest versions of GeoGebra and that its way of working is similar to that used in symbolic calculation programs.

**KEYWORDS:** Dynamic Mathematics Program, Analytical Geometry, Learning situation.

## INTRODUCCIÓN

Desde la década del los 80 del siglo pasado, el uso de los asistentes matemáticos en la docencia se ha convertido una práctica de los profesores sobre todo del nivel superior y entre los asistentes más utilizados se encuentran los programas de cálculo simbólico, Mathematica, Maple y Derive, entre otros, y los geométricos que permiten la manipulación directa y dinámica de la geometría como por ejemplo CabriGéomètre II y Geometer's Sketchpad. Sin embargo, en los últimos años, a sido recurrente el uso del programa de matemática dinámica GeoGebra que combina el cálculo simbólico y el dinamismo.

Considerando los resultados que brindan las diferentes investigaciones en el ámbito nacional e internacional (Barrena, 2011; Carrillo, 2011, 2013; Estrada et. al, 2011, 2013; Lima y Rodríguez, 2010; Delgado, 2002; Ortega, 2002; Pérez, 2006) en el empleo de estos asistentes matemáticos que además de revolucionar el conocimiento matemático, tiene un gran impacto en el aprendizaje, motivado por el poder expresivo que brindan estos recursos, se hace necesario estudiarlos, pues surgen interrogantes sobre qué se debe enseñar y aprender de los mismos dentro del currículo de Matemática, ya que en la matemática están presente tanto aspectos conceptuales, como aspectos computacionales, y el equilibrio que debe mantenerse entre ambos entra dentro de la dialéctica actual de dedicar más o menos tiempo en las tareas de cálculo y la resolución de problemas.

El conocimiento de dichos software y el desarrollo de habilidades para su empleo es de vital importancia en la formación del personal docente o estudiantes que se forman para ejercer como profesores de Matemática, fundamentalmente en estos momentos en que la informática literalmente invade todas las actividades humanas y en nuestros centros educacionales existen computadoras con potencialidades para el empleo de la gran mayoría de los software existentes.

Como parte de las tareas investigativas al hacer un estudio del Plan Estudio para la carrera de Licenciatura en Educación en la Especialidad de Matemática del Instituto Superior de Educación de la provincia de Huambo, Angola, se pudo apreciar que se le da gran importancia al uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el proceso de enseñanza aprendizaje desde los problemas del profesional hasta los objetivos generales y específicos de las disciplinas y asignaturas.

La revisión del Plan de Estudio y de los diferentes programas de las disciplinas dio como principal problema que en las orientaciones metodológicas de los mismos se puede observar que no existen precisiones de cómo usar las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de cada disciplina.

Teniendo en cuenta lo analizado y a partir de la experiencia de los autores con el uso del Programa de Matemática Dinámica GeoGebra se pudo determinar que era posible usar este programa de matemática dinámica en la disciplina de Geometría Analítica, el trabajo estará dirigido a orientar a los docente y estudiantes de la Carrera el uso de la opción CAS.

## DESARROLLO

Dentro de los métodos utilizados en la investigación se encuentran los de carácter empíricos como la observación, la encuesta y las entrevistas que permitieron constatar la situación sobre el empleo y uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la carrera de Matemática. Al mismo tiempo se emplearon métodos teóricos como el histórico - lógico, análisis - síntesis y la modelación, los que permitieron hacer una valoración crítica de las tendencias en el mundo del uso de la tecnología en la enseñanza y permitieron la elaboración de las tareas a utilizar en la disciplina de Geometría Analítica.

El uso combinado de los métodos de investigación posibilitó la obtención de algunos resultados, relacionados con el uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, y que se describen de manera breve:

Los asistentes matemáticos, en particular el GeoGebra, que pueden ser orientados a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ofrecen nuevas potencialidades educativas que los distinguen de los sistemas tradicionales de enseñanza. Dentro de las características que más sobresalen se destacan: *la representación múltiple de diferentes sistemas de notación, el dinamismo, el almacenamiento de trazas de los procedimientos, la interactividad, el almacenamiento de información, el aprendizaje colaborativo, la comunicación.*

Se coincide con Pérez (2006) en cuanto a las ventajas que proporciona el trabajo con los sistemas de cálculo algebraico, como por ejemplo la opción CAS del GeoGebra:

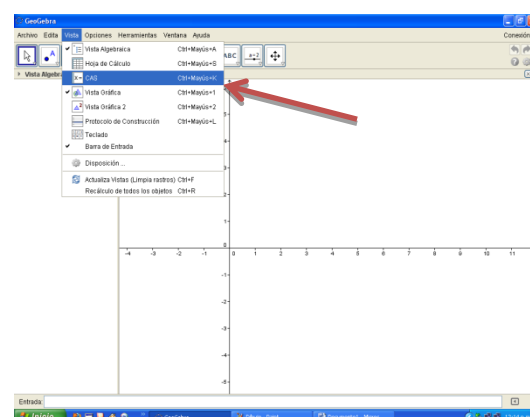
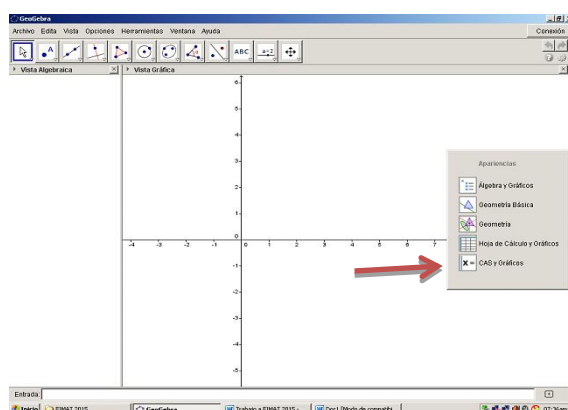
- Favorece la interiorización de los conceptos y procedimientos, de forma que estos permanezcan a más largo plazo, ayuda a progresar hacia niveles superiores de pensamiento formal.
- Desarrolla nuevas estrategias de razonamiento y propicia la investigación y el descubrimiento.
- Facilita el trabajo autónomo del estudiante en la resolución de problemas, en la medida en que permite experimentar con rapidez y seguridad.

- La capacidad gráfica facilita la integración de diversas imágenes y gráficas en el plano que son obstáculos en el aprendizaje. Se amplía el abanico de manipulaciones posibles y el de visualización.
- Su carácter interactivo provoca una retroalimentación inmediata. Estos sistemas ofrecen una ventaja indudable: reducen el tiempo empleado en los cálculos y las rutinas algebraicas que, en muchas ocasiones, son meros cálculos repetitivos que no aportan nada a los estudiantes.
- Facilita la aparición de contextos de trabajo colectivo, muy adecuados para el aprendizaje colaborativo.

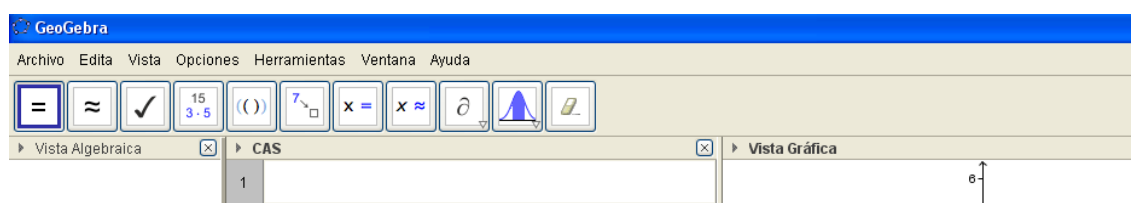
El programa de matemática dinámica GeoGebra, el cual es sin duda uno de los más conocidos en el mundo de las ciencias por su aplicabilidad en la enseñanza y el aprendizaje de estas materias, mezcla la funcionalidad de un procesador geométrico y algebraico, (Geometría-Álgebra), es un software escrito en Java, fácil de usar y que resulta ser una poderosa herramienta en el proceso de enseñanza y aprendizaje en educación matemática. Es un software de matemáticas que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, desarrollado por Markus LLothenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática.

GeoGebra vincula dos categorías, la relativa a Sistemas de Álgebra Computacional (CAS) y la relativa a los Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), y esto es lo más interesante. Combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo.

La versión en la que se trabajó fue GeoGebra 4.4.1.0, del 6 de diciembre de 2013, la cual incluye nuevas mejoras con respecto a las versiones anteriores, lo que se corroborará con la opción CAS. Antes de mostrar algunos ejemplos de cómo es posible usar la opción CAS del GeoGebra, se mostrará cómo acceder a esta opción y una breve explicación de su uso. Al cargar el programa existen dos posibilidades de acceder al CAS, una es por medio de la pantalla principal donde en la parte derecha se muestran las apariencias que se pueden optar con esta versión de GeoGebra. La segunda opción de acceder al CAS es por medio del menú Vista o por el teclado con Ctrl+Mayús+K, ver figura.



Luego de acceder a la opción, aparecerá en el boceto una barra de herramientas como las demás vistas del GeoGebra.

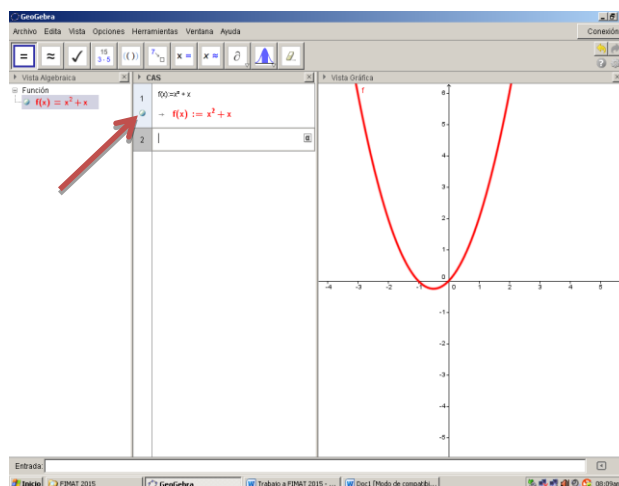


La forma de trabajar de esta vista es similar a la utilizada en la mayoría de programas de cálculo simbólico. Todas las entradas aparecen numeradas de forma correlativa y a cada entrada corresponderá una expresión de salida o resultado.

Aquí se pueden realizar sencillas operaciones numéricas o simbólicas en esta vista, obteniéndolos resultados de forma directa. Los tres primeros botones de la barra de herramientas, son las opciones necesarias para obtener un resultado en forma exacta, en forma aproximada o dejarlo sin realizar ninguna operación.

Se dispone de las opciones necesarias para facilitar la edición de cualquier expresión contenida en cualquiera de las filas, sin olvidar que se puede pulsar directamente sobre una expresión de entrada, para modificarla y por tanto, para obtener los nuevos resultados.

Otra ventaja que tiene es que las distintas vistas están relacionadas, de manera que cualquier valor contenido en una de ellas se podrá utilizar en otra de las vistas disponibles en GeoGebra. Por ejemplo, si se escribe una expresión simbólica (cuya variable sea  $x$ ) en la vista CAS, bastará con marcar el círculo (Ocultar/Mostrar) para obtener la definición de la función en la vista algebraica y su representación en la vista gráfica (ver figura).



Las opciones y comandos que ofrece la incorporación del cálculo simbólico a partir de la versión 4.2 de GeoGebra, no solo resuelven las incidencias anteriores, sino que además amplían las posibilidades de GeoGebra, que permitirán su uso en otros bloques de contenidos; lo que hace que poco a poco GeoGebra se convierta en un recurso imprescindible y sobre todo casi único, para el profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula (Carrillo De Albornoz, 2013).

Las opciones que ofrece la vista CAS de GeoGebra permiten trabajar los siguientes contenidos: *Factorización de números y polinomios, Operaciones con fracciones algebraicas, Resolución de ecuaciones, Resolución de sistemas de ecuaciones, Discusión de sistemas, Cálculo diferencial, Cálculo integral, Cálculo de límites, Sumas y productos de series, Simplificación de expresiones trigonométricas, Vectores y matrices, Resolución de ecuaciones diferenciales.*

Como se puede observar aparecen en la nueva versión de GeoGebra para trabajar el cálculo simbólico, comandos disponibles para trabajar con vectores y matrices. Un aspecto de interés en esta versión es que es posible, tanto en vectores como en matrices, trabajar con elementos numéricos o simbólicos sin que aparezca algún error, aspecto este que no ocurría en las versiones anteriores de GeoGebra.

También, para realizar operaciones con matrices y vectores se puede definir los elementos simbólicos como deslizadores, para estudiar qué ocurre al cambiar su valor y de esta forma aprovechar las características dinámicas de GeoGebra, de modo que la manipulación de los objetos, algo habitual en GeoGebra, faciliten la experimentación y la investigación y por tanto, el aprendizaje por descubrimiento para lo que este programa es uno de los mejores recursos que se pueden utilizar, sino el mejor, al menos para los que desde hace años están ilusionados con el uso de las TIC (Carrillo De Albornoz, 2013).

A continuación se muestran dos ejemplos en la asignatura de Geometría Analítica, donde se aplica la opción CAS del GeoGebra, la cual resulta novedosa, pues al compararla con otros asistentes matemáticos más poderosos como al Derive, el Maple o el Mathematica se observa a favor

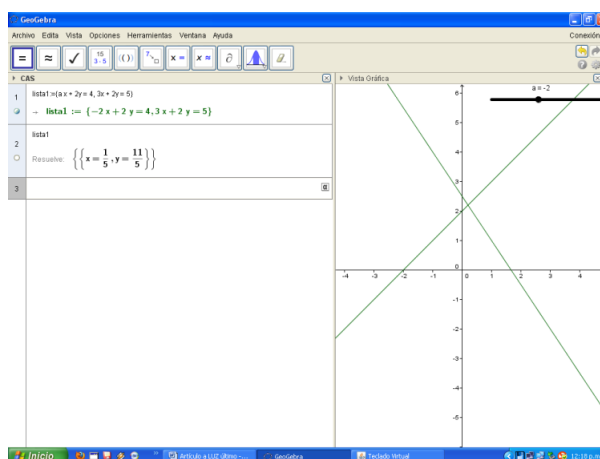
de GeoGebra su característica de software libre, además de la característica anterior hay que tener en cuenta que para ciertos niveles educativos más que potencia se requieren otras características como sencillez, intuición o dinamismo, por lo que GeoGebra es suficiente para el desarrollo de la mayoría de los contenidos (Carrillo De Albornoz, 2013).

De todas estas opciones se ejemplifican primeramente las referidas al trabajo con los sistemas de ecuaciones y matrices y luego el trabajo con vectores.

### Situación de aprendizaje 1

Investiga la relación de posición de las rectas:  $\begin{cases} ax + 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$  usando el programa de matemática dinámica GeoGebra, para ello puedes abrir el fichero sistema de ecuaciones. ggb.

Al ejecutar el fichero debe aparecer en el boceto de la pantalla de GeoGebra la siguiente imagen:



Luego, se les orientó a los estudiantes que realizarán las siguientes actividades:

Explora siguiendo las órdenes:

- Utiliza la opción CAS y resuelve el sistema dado.
- Representa gráficamente en un sistema de coordenadas el sistema de ecuaciones.
- Al mover el deslizador **a** (parámetro) analiza qué ocurre con las soluciones del sistema y con la relación de posición de las rectas.
- ¿Qué relación existe entre los coeficientes del sistema, las soluciones y la relación de posición de ambas rectas?



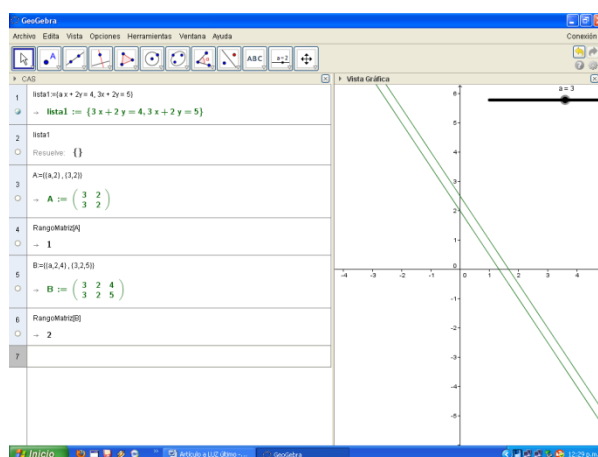
- e) Si el sistema tiene la forma general: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 aduzca una relación entre los coeficientes del sistema y la relación de posición de las rectas.

Con estas actividades se logra reactivar los conocimientos que tiene el estudiante de la enseñanza precedente o del Álgebra Lineal sobre la solución de los sistemas de ecuaciones lineales y los procedimientos para su resolución, pero además como se puede observar existe la posibilidad, de manera directa, de la representación gráfica de ambas rectas, analizando así la interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y se puede explorar con el deslizador las soluciones del mismo y llegar a la conclusión pedida en el inciso e) .

También, se pueden proponer las siguientes actividades con el mismo medio, pero analizando la relación de posición de las rectas utilizando los conocimientos de matrices.

- f) Escribe la matriz del sistema dado y la matriz ampliada.
- g) Determine el rango de dichas matrices.
- h) Explore con el deslizador y observe cómo varía el rango de estas matrices y el número de soluciones del sistema.
- i) A qué conclusión puedes arribar.

Al realizar estas actividades (ver figura) y con la solución de las mismas es posible lograr con los estudiantes la relación existente entre los conceptos de rango de una matriz, solución de un sistema de ecuaciones y relación de posición de dos rectas.



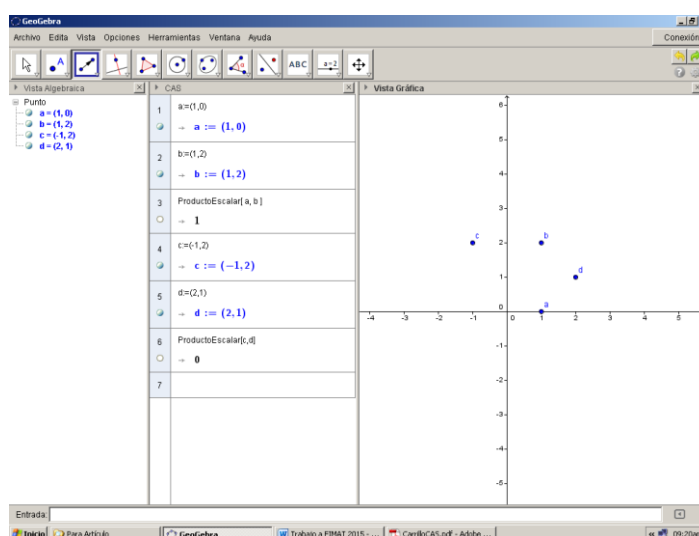
Otra de las opciones del CAS con las que se puede trabajar es con los vectores y que a continuación se expondrán ejemplos de cómo hacerlo con los estudiantes.

Situación de aprendizaje 2.

Con el uso del GeoGebra resuelva las siguientes actividades:

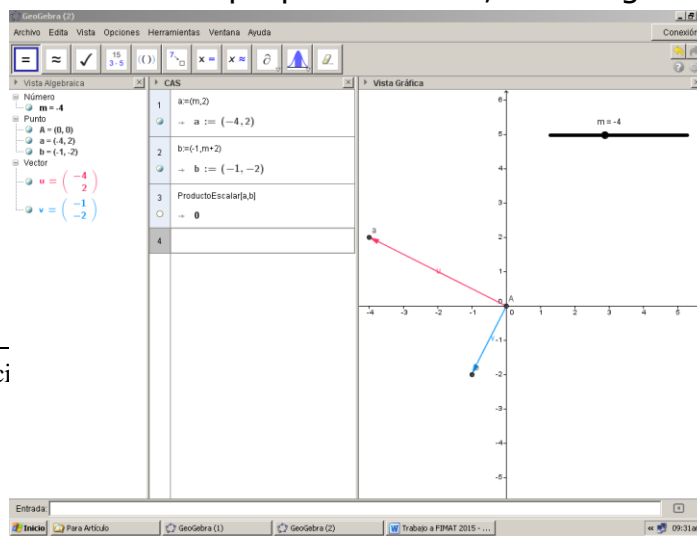


- Determine el producto escalar de los vectores  $\vec{a} = (1,0)$  y  $\vec{b} = (1,2)$ . ¿Qué resultado obtenemos?
- Representa los vectores en el sistema de coordenadas. ¿Qué relación de posición tienen?
- Determine el producto escalar de los vectores  $\vec{c} = (-1,2)$  y  $\vec{d} = (2,1)$ .
- Analiza las mismas preguntas que los incisos b y c.
- ¿A qué conclusión podríamos arribar?



No hay dudas que con estas actividades es posible que el estudiante arribe a conclusiones sobre la perpendicularidad de los vectores y su relación con el producto escalar, no obstante, como se puede observar, al representar los vectores en el sistema de coordenadas solo son representados como punto, de aquí que se hace necesario que se oriente la representación gráfica de los mismo, lo que es posible realizar con las opciones de la vista gráfica.

Si no se arriba a la conclusión deseada es posible introducir un deslizador y mover el mismo para que se pueda observar con más casos dónde solo es posible que los vectores sean perpendiculares, en la figura siguiente se muestra este caso.



## CONCLUSIONES

Como resultado de la labor investigativa se resumen algunos aspectos que se consideran de interés.

- Para el trabajo con la computadora se deben tener en cuenta qué contenidos curriculares se pueden tratar con la misma y que sea efectivo en el aprendizaje de los estudiantes.
- El profesor debe combinarla con la metodología tradicional a lo largo de un curso, para ello debe decidir y escoger para cada unidad didáctica el tratamiento que considere más conveniente. Además, se debe tener en cuenta el desarrollo individual de cada estudiante para aplicar con más efectividad esta.
- El programa de matemática dinámica GeoGebra constituye una poderosa herramienta que en manos de profesores y estudiantes puede contribuir a mejorar la motivación por la Matemática y de hecho mejorar la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura en cualquier nivel de enseñanza.
- La opción CAS del GeoGebra es una poderosa herramienta que puede contribuir al aprendizaje de la Geometría Analítica y que debe ser explotada por profesores y estudiantes en el aula de clases.
- Los ejemplos que se muestran en el trabajo son el resultado de las experiencias de los autores en la utilización del GeoGebra en la docencia.

## BIBLIOGRAFÍA

- Barrena, E. [et. al.] (2011). Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 25: 161-174, marzo, España.
- Carrillode Albornoz, A. (2011). Algunas novedades que ofrece la versión 4 de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 26: 159-164, junio, España.
- Carrillode Albornoz, A. (2013). Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 34: 151-167, junio, España.
- Delgado, P. (2002). Una estrategia didáctica para el desarrollo del subsistema de habilidades Modelar-Algoritmizar, con el apoyo de los asistentes matemáticos en la asignatura de Álgebra III de la carrera de Matemática Computación. Tesis en opción al título de Máster en Matemática Avanzada para la Ingeniería, Ciudad de la Habana.
- Estrada, M. [et. al.] (2011). El uso del GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas. *Evento FIMAT*, UCP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

- Estrada, M. [et. al.] (2013). La aplicación del GeoGebra en el plan de estudio D de la carrera de Matemática Física. *Evento FIMAT*, UCP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.
- Lima, S.; Rodríguez, M. (2010). La educación matemática en entornos virtuales. *En* Didáctica de las Ciencias. Nuevas Perspectivas. IV Congreso Internacional Didácticas de las Ciencias. Sello Editor EDUCACIÓN CUBANA, pp. 155 – 178, La Habana.
- Pérez, F. (2006). Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas. 8vo Congreso Internacional de Educación Matemática. Selección de conferencias, Sevilla, España.
- Ortega, P. (2002). La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraicos. Tesis en opción al grado científico de Doctor. Madrid.
- Sousa, J. B. M. (2016a). Computadores no Ensino. 1ra edição. Saarbrücken: Novas Edições Académicas.
- Sousa, J. B. M (2016b). Orientações metodológicas para a utilização do Geogebra nas aulas de geometria descritiva. *Revista Magazine de las Ciencias*. Publicación cuatrimestral. Vol. 1, Año 2016, No. 1 (Enero-Marzo). Recuperado de: <https://revistas.utb.edu.ec/index.php/magazine/article/view/43/224>